Colloquium 3, Grupa A

1. Z zasobów obliczeniowych pewnego serwera korzysta dwóch użytkowników. Każdy z nich wysyła do serwera zawsze trzy programy naraz. Użytkownik czeka, aż serwer wykona obliczenia dotyczące wszystkich trzech programów, a następnie odczekuje średnio 2 minuty (ten czas dany jest rozkładem wykładniczym), wysyła do serwera kolejne trzy programy, itd.
Serwer wykonuje obliczenia nad jednym programem, a gdy skończy zabiera się za następny czekający w kolejce FIFO. Obsługa każdego z programów w serwerze trwa tyle samo – ten czas dany jest rozkładem wykładniczym o średniej równej jednej minucie. Serwer jest w stanie pomieścić dowolną liczbę programów oczekujących na obliczenia.
Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że serwer nie wykonuje żadnych obliczeń. Proszę też wyliczyć średnią liczbę programów przetwarzanych przez serwer w ciągu godziny.
(max 10 punktów)

2. Do pewnego serwera w Urzędzie Miasta napływają zapytania z całego Krakowa – średnio 3 na minutę (zgodnie z rozkładem Poissona). Serwer obsługuje je pojedynczo, po kolei. W razie potrzeby czekające zgłoszenia zapisywane są w buforze, który jest na tyle duży, że może zapamiętać je wszystkie. Obsługa jednego zgłoszenia w większości przypadków (90%) trwa dokładnie dziesięć sekund. W pozostałych przypadkach obsługa zgłoszenia jest bardziej skomplikowana i zajmuje dokładnie minutę.
Proszę policzyć:
- średnią czas jaki upływa między dwoma obsłużonymi zgłoszeniami opuszczającymi serwer,
- średni czas, jaki upływa od momentu wygenerowania zapytania do otrzymania odpowiedzi.

(max 15 punktów)

3*. Proszę rozważyć system o nieskończonej liczbie stanów, w którym intensywność przychodzących zgłoszeń $\lambda_n = \lambda$, natomiast intensywność obsługi w stanie *n* wynosi :
- dla *n* niepodzielnego przez 3: $\mu_n = \mu$
- dla *n* podzielnego przez 3: $\mu_n = (n/3 + 1)\cdot \mu$

Oczywiście, w stanie 0: $\mu_0 = 0$.
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\frac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa B

1. Z pewnego serwera – bazy danych korzysta 4 użytkowników. Każdy z nich generuje zapytanie i czeka na odpowiedź. Gdy ją otrzyma, średnio po 4 minutach (ten czas dany jest rozkładem wykładniczym) generuje następne zapytanie, itd. Serwer jest w stanie pomieścić dowolną liczbę oczekujących zapytań. Obsługa następuje tylko wtedy, gdy w serwerze są co najmniej dwa zgłoszenia. Obsługiwana jest zawsze para zgłoszeń jednocześnie – obsługa takiej pary trwa średnio 2 minuty (ten czas również jest dany rozkładem wykładniczym).
Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że serwer nie wykonuje żadnych obliczeń. Proszę też wyliczyć średnią liczbę zapytań przetwarzanych przez serwer w ciągu godziny.
(max 10 punktów)

2. Pewien serwer z bazą danych obsługuje zgłoszenia przychodzące z całej Polski – średnio co 15 sekund (zgodnie z rozkładem Poissona). Serwer posiada dwa stanowiska obsługi. Każde z nich pracuje ze średnią intensywnością trzech zgłoszeń na minutę, czasy obsługi dane są odpowiednim rozkładem wykładniczym. W razie potrzeby czekające zgłoszenia zapisywane są w buforze, który jest na tyle duży, że może zapamiętać je wszystkie.
Proszę policzyć:
- średnią liczbę zgłoszeń obsługiwanych w ciągu godziny,
- średni czas, jaki upływa od momentu wygenerowania zapytania do otrzymania odpowiedzi,
- maksymalną intensywność przychodzących zgłoszeń, którą serwer byłby jeszcze w stanie obsłużyć.

(max 15 punktów)

3*. Proszę rozważyć system o nieskończonej liczbie stanów, w którym intensywność przychodzących zgłoszeń $\lambda_n = \lambda$, natomiast intensywność obsługi w stanie *n* wynosi :
- dla *n* niepodzielnego przez 3: $\mu_n = \mu$
- dla *n* podzielnego przez 3: $\mu_n = (n/3 + 1)\cdot \mu$

Oczywiście, w stanie 0: $\mu_0 = 0$.
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\frac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa C

1. Pewna centrala u operatora telefonicznego X ma obsługiwać trzy nieduże bloki mieszkalne, dwa osiedla liczące po 30 małych domków jednorodzinnych oraz 10 firm prywatnych. W każdym bloku jest 20 mieszkań, a z każdego mieszkania wykonywanych jest średnio 8 połączeń w godzinach od 16.00 do 24.00, połączenia te trwają przeciętnie 15 minut. Z każdego domku generowane jest średnio jedno 5-minutowe połączenie na 2 godziny, niezależnie od pory dnia. Z kolei każda z firm prywatnych generuje statystycznie dwadzieścia 3-minutowych połączeń na godzinę. Firmy pracują od 8.00 do 16.00.

Projektowanie centrali (które powinno uwzględniać połączenia w godzinie największego ruchu) zlecono nowo powstałemu działowi technicznemu operatora X. Dyrektor tego działu chciałby z jednej strony ograniczyć do minimum liczbę koniecznych łączy wyjściowych tej centrali, a z drugiej strony zagwarantować abonentom jak najmniejsze prawdopodobieństwo odrzucenia wykonywanego połączenia. Ostatecznie, postanowiono tak zaprojektować tą centralę, aby iloczyn tych dwóch wielkości (liczby łączy i prawdopodobieństwa odrzucenia) był jak najmniejszy.
Ile będzie wynosić liczba łączy w tej centrali? Wynik proszę podać z dokładnością możliwą do uzyskania przy użyciu tabeli B-Erlanga z tyłu kartki. Odpowiedź proszę uzasadnić.
(max 10 punktów)

2. Pewien system posiada jedno stanowisko obsługi i bufor, którego rozmiar można uznać za nieskończony. Zgłoszenia przychodzą (zgodnie z rozkładem Poissona) średnio raz na 6 sekund. Czas trwania obsługi dany jest rozkładem prawdopodobieństwa: $f(t) = A\cdot(9-t)$ na przedziale $<0, 9>$ sekund. Stałą A należy dobrać w taki sposób, aby funkcja f(t) rzeczywiście była rozkładem prawdopodobieństwa.
Proszę obliczyć średni czas, jaki zgłoszenie oczekuje na obsługę.
(max 15 punktów)

3*. Proszę przeanalizować system, w którym intensywność zgłoszeń przychodzących w stanie *n* wynosi:
- dla *n* parzystego: $\lambda_n = (n/2 + 1)!\cdot \lambda$
- dla *n* nieparzystego: $\lambda_n = ((n-1)/2 + 1)!\cdot \lambda$

natomiast intensywność obsługi w stanie *n* wynosi :
- dla *n* parzystego: $\mu_n = (n/2 + 1)!\cdot \mu$
- dla *n* nieparzystego: $\mu_n = ((n-1)/2 + 1)!\cdot \mu$

Oczywiście, w stanie 0: $\mu_0 = 0$.
System ma nieskończony duży bufor (nieskończoną liczbę stanów).
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \exp(-\dfrac{(x - m)^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}\cdot\left[1+\dfrac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa D

1. Pewna centrala telefoniczna obsługuje 3 duże instytucje, 10 małych przedsiębiorstw oraz dwa bloki mieszkalne – każdy składa się z 45 mieszkań prywatnych. Każda z instytucji generuje średnio trzydzieści 5-minutowych rozmów na godzinę w okresie od 10.00 do 18.00, z czego 40 % są to rozmowy wewnątrz tej instytucji. Przedsiębiorstwa pracują od 8.00 do 19.00 i w tym czasie z każdego z nich wykonywanych jest średnio pięć rozmów telefonicznych na godzinę, trwających przeciętnie 3 minuty. Z kolei z każdego z mieszkań prywatnych generowanych jest średnio 5 połączeń w ciągu jednego wieczora (od 19.00 do 24.00). Połączenia te trwają średnio 4 minuty.

Centrala ma 22 łącza wyjściowe. Proszę obliczyć, ile dodatkowych bloków mieszkalnych (o takiej samej charakterystyce ruchu telekomunikacyjnego) można by podłączyć do tej centrali, tak aby prawdopodobieństwo blokady nie wzrosło bardziej niż dwukrotnie. Wynik proszę podać z dokładnością możliwą do uzyskania przy użyciu tabeli B-Erlanga z tyłu kartki.
(max 10 punktów)

2. Dany jest system z jednym stanowiskiem obsługi i nieskończenie dużym buforem. Zgłoszenia przychodzą (zgodnie z rozkładem Poissona) średnio raz na 10 sekund. Czas trwania obsługi dany jest rozkładem prawdopodobieństwa: $p(t) = A \cdot t$ na przedziale $<0, 6>$ sekund. Stałą A należy dobrać w taki sposób, aby funkcja p(t) rzeczywiście była rozkładem prawdopodobieństwa.
Proszę obliczyć średni czas, jaki zgłoszenie spędza w tym systemie.
(max 15 punktów)

3*. Proszę przeanalizować system, w którym intensywność zgłoszeń przychodzących w stanie *n* wynosi:
- dla *n* parzystego: $\lambda_n = (n/2 + 1)! \cdot \lambda$
- dla *n* nieparzystego: $\lambda_n = ((n-1)/2 + 1)! \cdot \lambda$

natomiast intensywność obsługi w stanie *n* wynosi :
- dla *n* parzystego: $\mu_n = (n/2 + 1)! \cdot \mu$
- dla *n* nieparzystego: $\mu_n = ((n-1)/2 + 1)! \cdot \mu$

Oczywiście, w stanie 0: $\mu_0 = 0$.
System ma nieskończony duży bufor (nieskończoną liczbę stanów).
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\frac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa E

1. Do pewnej centrali podłączone są dwie grupy użytkowników:
   - 200 osób prywatnych wykonujących średnio 3 połączenia na godzinę, trwające przeciętnie 2 minuty,
   - 2 firmy - każda generuje średnio 30 rozmów telefonicznych na godzinę, trwających 6 minut.

Proszę obliczyć ile łączy wyjściowych powinna mieć centrala, aby prawdopodobieństwo odrzucenia połączenia nie przekraczało 10%. Proszę uwzględnić fakt, że 80 % osób, których rozmowy zostały odrzucone, ponownie próbuje się połączyć. Wynik proszę podać z dokładnością możliwą do uzyskania przy użyciu tabeli B-Erlanga z tyłu kartki.
(max 10 punktów)

2. Proszę rozważyć system z trzema stanowiskami obsługi i buforem, którego rozmiar można uznać za nieskończenie duży. Zgłoszenia przychodzą do tego systemu zgodnie z rozkładem Poissona ze stałą intensywnością równą 30 na minutę. Czas obsługi zgłoszenia dany jest rozkładem wykładniczym o średniej równej 4 sekundy.
Proszę obliczyć średni czas oczekiwania na obsługę. Proszę też wyjaśnić, ile maksymalnie mogłaby wynosić intensywność przychodzących zgłoszeń, tak aby system był jeszcze w stanie obsłużyć wszystkie przychodzące zgłoszenia.
(max 15 punktów)

3*. Proszę rozważyć system, który ma trzy stanowiska obsługi, ale drugie stanowisko działa tylko wtedy, gdy w systemie jest co najmniej 100 zgłoszeń, a trzecie stanowisko – gdy w systemie jest co najmniej 200 zgłoszeń. System ma nieskończony bufor. Intensywności obsługi wszystkich trzech stanowisk są takie same i wynoszą λ. Intensywność przychodzących zgłoszeń $\lambda_n = \lambda$.
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\frac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa F

1. Centrala obsługuje 10 bloków i 24 domki jednorodzinne. W każdym bloku jest 50 mieszkań. Z każdego mieszkania generowanych jest średnio 6 rozmów na dobę, trwających 12 minut. Z kolei z każdego domku wykonywane są średnio cztery 15-minutowe połączenia w godzinach od 18.00 do 22.00 oraz pięć 20-minutowych połączeń w pozostałych godzinach. Proszę obliczyć, ile łączy wyjściowych powinna mieć centrala, aby prawdopodobieństwo odrzucenia nadchodzącej rozmowy nie przekraczało 15 %. Proszę uwzględnić fakt, że dwie trzecie osób, których połączenia zostały odrzucone, próbuje zadzwonić ponownie.
(max 10 punktów)

2. Pewien system posiada dwa stanowiska obsługi i bufor, którego rozmiar można uznać za nieskończenie duży. Czas obsługi pojedynczego zgłoszenia dany jest rozkładem wykładniczym o średniej równej 1 milisekundzie. Zgłoszenia przychodzą do tego systemu zgodnie z rozkładem Poissona ze stałą intensywnością równą 500 na sekundę.
Proszę obliczyć średni czas oczekiwania na obsługę. Proszę też wyjaśnić, ile maksymalnie mogłaby wynosić intensywność przychodzących zgłoszeń, tak aby system był jeszcze w stanie obsłużyć wszystkie przychodzące zgłoszenia.
(max 15 punktów)

3*. Proszę rozważyć system, który ma trzy stanowiska obsługi, ale drugie stanowisko działa tylko wtedy, gdy w systemie jest co najmniej 100 zgłoszeń, a trzecie stanowisko – gdy w systemie jest co najmniej 200 zgłoszeń. System ma nieskończony bufor. Intensywności obsługi wszystkich trzech stanowisk są takie same i wynoszą λ. Intensywność przychodzących zgłoszeń $\lambda_n = \lambda$.
Proszę założyć, że system jest stabilny i obliczyć prawdopodobieństwo stanu zerowego jako funkcję $\rho = \lambda/\mu$.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\dfrac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \dfrac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$

Colloquium 3, Grupa G

1. Do pewnego systemu zgłoszenia nadchodzą trójkami – intensywność nadchodzenia **trójek** dana jest rozkładem Poissona, o średniej 10 na sekundę. System posiada trzy identyczne stanowiska obsługi – każde z nich obsługuje jednocześnie dwa zgłoszenia. Czas obsługi **pary** zgłoszeń na jednym stanowisku dany jest rozkładem wykładniczym o średniej równej 100 milisekundom. Pojedyncze zgłoszenie nie jest obsługiwane.
Przychodzące zgłoszenia kolejno zapełniają wolne miejsca na stanowiskach obsługi, nie zostawiając nigdy dwóch stanowisk z pojedynczymi zgłoszeniami (które w takiej sytuacji nie mogłyby pracować). System nie ma żadnego bufora – trójka zgłoszeń, która nie mieści się już w systemie jest odrzucana w całości.
Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że w systemie nie pracuje żadne stanowisko obsługi. Proszę też obliczyć procent zgłoszeń odrzucanych oraz średnią częstotliwość z jaką obsłużone zgłoszenia opuszczają system.
(max 15 punktów)

2. Pewien serwer posiada jedno stanowisko obsługi i bufor, co do którego można przyjąć, że jest nieskończenie duży. Zgłoszenia przychodzą ze stałą intensywnością równą 10^4 na minutę (zgodnie z rozkładem Poissona), a czas obsługi jednego zgłoszenia (w milisekundach) można przybliżyć następującym rozkładem prawdopodobieństwa:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2 + 4t - 8}$$

Proszę policzyć średni czas, jaki zgłoszenie przebywa w serwerze oraz średnią liczbę zgłoszeń obsługiwanych w ciągu minuty.
(max 10 punktów)

3. Proszę wyprowadzić jak najprostszą zależność na prawdopodobieństwo blokady w systemie Engseta, czyli M/M/N/N/Z, dla Z>N.
(5 punktów)

Powodzenia.

Rozkład Poissona: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład wykładniczy: $a(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$

Rozkład Gaussa (normalny): $N(m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-\frac{(\mathrm{x - m})^2}{2\sigma^2})$

Wzór Pollaczka-Chinczyna: $L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right]$