Colloquium 4, Grupa A

1. Jaką oszczędność w zarządzaniu działem Biura Obsługi Klienta (polegającą na redukcji liczby stanowisk obsługi) mogą odnotować dwa połączone przedsiębiorstwa, jeżeli:
a. każda z firm przed połączeniem posiadała 15 stanowisk obsługi klienta,
b. w każdej z firm 90% klientów czekało na obsługę nie więcej niż 5 sekund ,
c. średni czas obsługi w każdej z firm był taki sam,
d. obciążenie BOK-u każdej z firm wynosiło 11 Erlangów,
e. utrzymanie każdego ze stanowisk kosztuje 2000 PLN miesięcznie,
f. po połączeniu firm jakość obsługi klientów (punkt b) nie może się pogorszyć.
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. Tablica routingu dla pewnej sieci złożonej z czterech węzłów wygląda następująco:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do sieci dochodzą dwa strumienie zgłoszeń, oba o charakterze poissonowskim. Jeden z nich, o średniej intensywności równej 160 zgłoszeń na sekundę wchodzi do węzła nr 1, a drugi (100 zgłoszeń na sekundę) do węzła nr 4. W każdym z węzłów znajduje się taki sam serwer M/M/1 o średniej intensywności obsługi równej 250 zgłoszeń na sekundę. Proszę obliczyć średnie liczby zgłoszeń znajdujących się we wszystkich węzłach oraz wskazać te węzły, dla których sumaryczny strumień zgłoszeń wchodzących ma charakter poissonowski.
(max 10 punktów)

3. Do pewnego serwera w sieci, pakiety docierają ze średnią intensywnością równą $2 \cdot 10^6$ / sekundę. Wariancja odstępu czasu między dwoma pakietami wynosi $1.9 \cdot 10^{-14}$ s^2, a wariancja odstępu czasu uśrednionego po 5 pakietach: 10^{-14} s^2 . Czas obsługi każdego z pakietów w serwerze to 0.4 μs. Serwer posiada bufor, o którym można założyć, że jest nieskończenie duży.
Strumień pakietów mógłby zostać poddany kompresji, wówczas średnie obciążenie serwera ρ spadłoby o 0.1, ale parametr Hursta tego strumienia wzrósłby o 0.1. Czas obsługi pakietów nie uległby zmianie.
Dla osoby zarządzającej tą siecią ważne jest, aby zarówno obciążenie serwera (ρ) jak i średnia liczba pakietów jednocześnie znajdujących się w serwerze (L) były jak najmniejsze. Stworzono kryterium optymalizacyjne K biorące pod uwagę obie te wartości z pewnymi wagami:

$$K = A \cdot \rho + (1-A) \cdot L \qquad , \ A \in \langle 0 , 1 \rangle.$$

Oczywiście, K powinno być jak najmniejsze.
Proszę obliczyć, dla jakich wartości stałej A kompresja strumienia pakietów jest opłacalna.
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot\mu\cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu \cdot (N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2} \right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$

Colloquium 4, Grupa B

1. Czy dwie firmy zamierzające się połączyć będą mogły odnotować oszczędności w działalności swoich Biur Obsługi Klienta polegające na zredukowaniu liczby stanowisk ?
Każda z firm przed połączeniem posiadała 10 stanowisk obsługi, a średni czas obsługi był taki sam w obu firmach. Obciążenie każdego z biur wynosiło 8 Erlangów. W każdej z firm 95% klientów czekało na obsługę nie dłużej niż 10 sekund i nie powinno się to pogorszyć po fuzji tych firm.
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. Tablica routingu dla pewnej sieci złożonej z czterech węzłów wygląda następująco:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do sieci dochodzą dwa strumienie zgłoszeń, oba o charakterze poissonowskim. Jeden z nich, o średniej intensywności równej 16 zgłoszeń na sekundę wchodzi do węzła nr 1, a drugi (8 zgłoszeń na sekundę) do węzła nr 2. W każdym z węzłów znajduje się taki sam serwer M/M/1 o średniej intensywności obsługi równej 30 zgłoszeń na sekundę. Proszę obliczyć średnie liczby zgłoszeń znajdujących się we wszystkich węzłach oraz wskazać te węzły, dla których sumaryczny strumień zgłoszeń wchodzących ma charakter poissonowski.
(max 10 punktów)

3. Do pewnego serwera w sieci, pakiety docierają ze średnią intensywnością równą $2 \cdot 10^6$ / sekundę. Wariancja odstępu czasu między dwoma pakietami wynosi $1.9 \cdot 10^{-14}$ s^2, a wariancja odstępu czasu uśrednionego po 5 pakietach: 10^{-14} s^2 .
Czas obsługi każdego z pakietów w serwerze to 0.4 μs. Serwer posiada bufor, o którym można założyć, że jest nieskończenie duży.
Strumień pakietów mógłby zostać poddany kompresji, wówczas średnie obciążenie serwera ρ spadłoby o 0.2, ale parametr Hursta tego strumienia wzrósłby o 0.1. Czas obsługi pakietów nie uległby zmianie.
Dla osoby zarządzającej tą siecią ważne jest, aby zarówno obciążenie serwera (ρ) jak i średnia liczba pakietów jednocześnie znajdujących się w serwerze (L) były jak najmniejsze. Stworzono kryterium optymalizacyjne K biorące pod uwagę obie te wartości z pewnymi wagami:

$$K = A \cdot \rho + (1-A) \cdot L \qquad , \ A \in \langle 0 , 1 \rangle.$$

Oczywiście, K powinno być jak najmniejsze.
Proszę obliczyć, dla jakich wartości stałej A kompresja strumienia pakietów jest opłacalna.
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot \mu \cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu \cdot (N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2} \right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$

Colloquium 4, Grupa C

1. Do Biura Obsługi Klienta, które zatrudnia 6 pracowników, dzwoni przeciętnie 600 osób na godzinę. Rozmowa z pojedynczym klientem trwa średnio 20 sekund.
Jakie będzie prawdopodobieństwo, że osoba dzwoniąca do tego biura będzie musiała czekać na rozmowę dłużej niż 15 sekund?
Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, gdy trzech pracowników pójdzie na urlop?
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. W prostej sieci dwuwęzłowej macierz routingu wygląda następująco:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Intensywności zewnętrznych strumieni zgłoszeń wpływających do sieci wynoszą odpowiednio : 3/s (dla węzła nr 1) oraz 2/s (dla węzła nr 2). W obu węzłach znajdują się pojedyncze stanowiska obsługi o tej samej intensywności μ. Proszę tak dobrać intensywność μ, aby była możliwie jak najmniejsza, ale żeby średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w sieci nie przekraczała dziesięciu.
(max 10 punktów)

3. Pakiety przychodzą do pewnego routera w odstępach równych średnio 0.1 μs. Strumień przychodzących pakietów jest samopodobny - odchylenie standardowe odstępu czasu między dwoma pakietami wynosi 30 ns, a odchylenie standardowe odstępu czasu uśrednionego po 6 pakietach: 17.3 ns. Czas obsługi każdego pakietu w routerze jest stały i wynosi 50 ns.
Rozważana jest kompresja tego strumienia pakietów – możliwe byłoby zmniejszenie średniej intensywności przychodzących pakietów o 20 %, ale spowodowałoby to wzrost współczynnika Hursta o 0.2.
Czy taka kompresja byłaby opłacalna ?
Proszę odpowiedzieć na to pytanie, jako kryterium rozważań przyjmując iloczyn średniego obciążenia routera (ρ) i średniego opóźnienia tranzytowego pakietów w routerze. Oczywiście, iloczyn ten powinien być jak najmniejszy.
Czy to kryterium można wyrazić w prostszy sposób ?
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot\mu\cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu\cdot(N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$

Colloquium 4, Grupa D

1. W Biurze Obsługi Klienta, które zatrudnia 10 pracowników, rozmowa z pojedynczym klientem trwa średnio 40 sekund. Do biura dzwoni przeciętnie jedna osoba co 5 sekund.
Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba dzwoniąca do tego biura będzie musiała czekać na rozmowę dłużej niż 20 sekund. Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, gdy z biura zostanie zwolnionych trzech pracowników ?
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. Pewną sieć tworzą dwa węzły. Intensywności zewnętrznych strumieni zgłoszeń wpływających do tych węzłów to 2 zgłoszenia na sekundę w przypadku węzła nr 1 oraz 4 zgłoszenia na sekundę w przypadku węzła nr 2. Tablica routingu w sieci wygląda następująco:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

W obu węzłach znajdują się pojedyncze stanowiska obsługi o tej samej intensywności μ. Proszę tak dobrać intensywność μ, aby była możliwie jak najmniejsza, ale żeby średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w sieci nie przekraczała sześciu.
(max 10 punktów)

3. Pakiety przychodzą do pewnego routera w odstępach równych średnio 0.2 μs. Strumień przychodzących pakietów jest samopodobny - odchylenie standardowe odstępu czasu między dwoma pakietami wynosi 45 ns, a odchylenie standardowe odstępu czasu uśrednionego po 6 pakietach: 26 ns. Czas obsługi każdego pakietu w routerze jest stały i wynosi 100 ns.
Rozważana jest kompresja tego strumienia pakietów – możliwe byłoby zmniejszenie średniej intensywności przychodzących pakietów o 20 %, ale spowodowałoby to wzrost współczynnika Hursta o 0.1.
Czy taka kompresja byłaby opłacalna ?
Proszę odpowiedzieć na to pytanie, jako kryterium rozważań przyjmując iloczyn średniego obciążenia routera (ρ) i średniego opóźnienia tranzytowego pakietów w routerze. Oczywiście, iloczyn ten powinien być jak najmniejszy.
Czy to kryterium można wyrazić w prostszy sposób ?
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot\mu\cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu\cdot(N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$

Colloquium 4, Grupa E

1. Przy projektowaniu pewnego Biura Obsługi Klienta założono, że średni czas oczekiwania na obsługę nie może być dłuższy niż 5% średniego czasu obsługi. Ilu powinno być pracowników w tym biurze, jeżeli przewidywany ruch telekomunikacyjny, który będzie musiał być obsłużony, to 12 Erlangów ?
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. Projektowaną sieć transmisyjną będą tworzyć cztery węzły. Połączenia między węzłami będą wyglądały zgodnie z następującą tablicą routingu:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z zewnątrz sieci, zgłoszenia będą wchodzić tylko do węzła nr 2, ze średnią intensywnością równą 12 zgłoszeń na sekundę.
Projektant sieci ma do dyspozycji 6 stanowisk obsługi, każde będące w stanie przetwarzać maksymalnie 12 zgłoszeń na sekundę. Może je rozmieścić w dowolnych węzłach (np. tworząc 3-stanowiskowy system w węźle nr 1 i pojedyncze stanowiska w pozostałych węzłach).
Proszę zdecydować, ile stanowisk powinno się znajdować w każdym z węzłów, tak aby średnie opóźnienie tranzytowe zgłoszenia przechodzącego przez sieć było jak najmniejsze. Odpowiedź proszę uzasadnić.
(max 10 punktów)

3. Strumień pakietów przychodzących do pewnego routera ma następujące własności:
- średnia intensywność przychodzących pakietów to $3 \cdot 10^5$ / sekundę
- wariancja średniego odstępu czasu między dwoma przychodzącymi pakietami wynosi $4 \cdot 10^{-12}$ s^2.
Wszystkie pakiety mają taki sam rozmiar (100 B), a ich obsługa w routerze trwa zawsze 2 mikrosekundy. Router posiada bufor, o którym można założyć, że jest nieskończenie duży.
W celu zbadania samopodobieństwa tego strumienia pakietów, obliczono wariancję odstępu czasu między pakietami dla grup liczących po 8 pakietów. Wariancja ta wyniosła $1.7 \cdot 10^{-12}$ s^2.

Proszę obliczyć średni czas, jaki pakiet spędza w tym routerze oraz średnią częstotliwość, z jaką pakiety opuszczają router.
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot\mu\cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu \cdot (N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$

Colloquium 4, Grupa F

1. Przy projektowaniu pewnego Biura Obsługi Klienta założono, że średni czas oczekiwania na obsługę nie może być dłuższy niż jedna dziesiąta średniego czasu obsługi. Ilu powinno być pracowników w tym biurze, jeżeli przewidywany ruch telekomunikacyjny, który będzie musiał być obsłużony, to 7 Erlangów ?
Wyniki proszę podać z dokładnością, którą umożliwia tabela zamieszczona na odwrocie.
Proszę założyć, że zgłoszenia telefoniczne przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy trwania rozmów dane są rozkładem wykładniczym. Dzwoniący klienci czekają tak długo, aż zostaną obsłużeni.
(max 10 punktów)

2. Projektowaną sieć transmisyjną będą tworzyć cztery węzły. Połączenia między węzłami będą wyglądały zgodnie z następującą tablicą routingu:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z zewnątrz sieci, zgłoszenia będą wchodzić tylko do węzła nr 2, ze średnią intensywnością równą 27 zgłoszeń na sekundę.
Projektant sieci ma do dyspozycji 9 stanowisk obsługi, każde będące w stanie przetwarzać maksymalnie 10 zgłoszeń na sekundę. Może je rozmieścić w dowolnych węzłach (np. tworząc 3-stanowiskowy system w węźle nr 1 i podwójne stanowiska w pozostałych węzłach).
Proszę zdecydować, ile stanowisk powinno się znajdować w każdym z węzłów, tak aby średnie opóźnienie tranzytowe zgłoszenia przechodzącego przez sieć było jak najmniejsze. Odpowiedź proszę uzasadnić.
(max 10 punktów)

3. Strumień pakietów przychodzących do pewnego routera ma następujące własności:
- średnia intensywność przychodzących pakietów to $4 \cdot 10^5$ / sekundę
- wariancja średniego odstępu czasu między dwoma przychodzącymi pakietami wynosi $4 \cdot 10^{-12}\ s^2$.
Wszystkie pakiety mają taki sam rozmiar (200 B), a ich obsługa w routerze trwa zawsze 2 mikrosekundy. Router posiada bufor, o którym można założyć, że jest nieskończenie duży.
W celu zbadania samopodobieństwa tego strumienia pakietów, obliczono wariancję odstępu czasu między pakietami dla grup liczących po 8 pakietów. Wariancja ta wyniosła $1.7 \cdot 10^{-12}\ s^2$.
Proszę obliczyć średni czas, jaki pakiet spędza w tym routerze oraz średnią częstotliwość, z jaką pakiety opuszczają router.
(max 10 punktów)

Powodzenia.

$$P_{Delay>t} = P_D \cdot e^{-(N-\rho)\cdot\mu\cdot t}$$

$$D = P_{Delay} \cdot \frac{1}{\mu \cdot (N-\rho)}$$

$$L_{wait} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2}{\tau_{śr}^2}\right] \qquad L = \frac{\rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{\frac{H}{1-H}}} \qquad \sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma_t^2}{n^{2-2H}}$$