Ćwiczenia II

1. Zgłoszenia telefoniczne przychodzą do centrali zgodnie z rozkładem wykładniczym (λ = 6/s). Ostatnie zgłoszenie nadeszło w chwili t. Jakie jest prawdopodobieństwo, że następne zgłoszenie przyjdzie dokładnie 0.5 sekundy później ? Ile wynosi prawdopodobieństwo, że przez 3 sekundy nie będzie żadnego zgłoszenia ?

Odpowiedzi: $P = 0$, $P_0(3s) = e^{-18} = 1.5 \cdot 10^{-8}$.

2. Długość życia pewnej bakterii można przybliżyć rozkładem wykładniczym o średniej 4 lata. Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że dana bakteria z tego gatunku będzie żyć co najmniej 10 lat. Proszę też policzyć prawdopodobieństwo, że bakteria dożyje swoich 16-tych urodzin przy założeniu, że już żyje 6 lat.

Wykładniczy strumień zdarzeń jest bezpamięciowy, więc oba prawdopodobieństwa są takie same: $P = e^{-2.5} = 8.2 \cdot 10^{-2}$

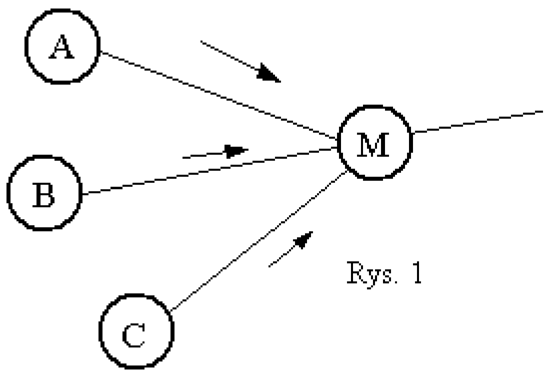
3. Serwer świadczy usługę dostępu do bazy danych. Obsługa jednego klienta trwa 2 minuty. Zgłoszenia od klientów napływają zgodnie z rozkładem Poissona, średnio co 30 sekund. Od ostatniego zgłoszenia upłynęło już 15 sekund, ale żaden inny klient nie czeka na obsługę. Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że następne nadchodzące zgłoszenie będzie musiało czekać na obsługę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w czasie najbliższych 75 sekund nadejdą nie więcej niż 2 zgłoszenia ?

Odpowiedzi : $P = 1 - e^{-3.5} = 0.97$, $P = e^{-2.5} + 2.5 \cdot e^{-2.5} + \frac{(2.5)^2}{2} \cdot e^{-2.5} = 0.54$

4. Pakiety przychodzą do węzła M z trzech różnych źródeł (rys. 1):
- z węzła A średnio co 3 sekundy,
- z węzła B średnio co 2 sekundy
- i z węzła C średnio co sekundę.

Węzły A, B i C wysyłają pakiety niezależnie od siebie, każdy zgodnie z rozkładem Poissona. Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że w ciągu sekundy do węzła M przyjdzie dokładnie jeden pakiet.

Odpowiedź: $P_1(1s) = \frac{11}{6} \cdot e^{-\frac{11}{6}}$



Rys. 1

↓

5. Serwer biblioteczny obsługuje zgłoszenia przychodzące z dwóch różnych źródeł. Z jednego z nich zgłoszenia przychodzą średnio co trzy minuty, a z drugiego – ze średnią częstotliwością dwóch zgłoszeń na minutę. Zakładamy, że zgłoszenia – zarówno z jednego jak i z drugiego źródła – przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu minuty w sumie przyjdą dokładnie dwa zgłoszenia ?

Odpowiedź: $P_2(1\,\text{min}) = \dfrac{49}{18} \cdot e^{\frac{-7}{3}}$

6*. Do węzła M docierają, niezależnie od siebie, dwa typy pakietów : A i B. Rozkład przybyć obu typów pakietów dany jest rozkładem Poissona, przy czym pakiety A przybywają średnio co minutę, a pakiety B – co 70 sekund. Ostatni pakiet A dotarł do węzła M przed 30-stoma sekundami, a pakiet B – przed minutą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że najbliższy pakiet będzie typu A ?

$$P = \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{60} \cdot e^{-\frac{x}{60}} dx \cdot \frac{1}{70} \cdot e^{-\frac{t}{70}} dt = ... = \frac{70}{70+60} = \frac{7}{13}$$

7. W pewnym serwerze, czas oczekiwania na zgłoszenie jest dany rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda = 10/s$. Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że najbliższe dwa zgłoszenia przyjdą nie wcześniej niż 2 sekundy i nie później niż 3 sekundy od chwili obecnej.

Odpowiedź : $P = e^{-20} - 11 \cdot e^{-30}$

8*. Do pewnego węzła przychodzą pakiety z dwóch źródeł: A i B. Czas oczekiwania na pakiety ze źródła A dany jest rozkładem jednostajnym na przedziale <0, 0.2 s>. Pakiety ze źródła B przychodzą z tą samą średnią częstotliwością, ale czas oczekiwania na nie dany jest rozkładem wykładniczym. Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że najbliższy pakiet będzie pochodził ze źródła B.

Rozwiązanie : $P = 1 - \int_0^{0.2} 5 \cdot e^{-10t} dt = \dfrac{1+e^{-2}}{2}$

9. Do pewnej firmy kurierskiej ludzie przynoszą przesyłki do wysłania – średnio dwie na godzinę (zgodnie z rozkładem Poissona). Gdy w firmie zgromadzą się cztery przesyłki, kurier zabiera je i rozwozi do odbiorców. Jeden z kurierów właśnie wyruszył z przesyłkami. Proszę podać prawdopodobieństwo, że następny kurier wyruszy nie wcześniej niż za dwie godziny.

Odpowiedź: $P = 23\frac{2}{3} \cdot e^{-4}$

↓

10. Serwer z bazą danych z adresami mieszkańców Krakowa w Urzędzie Miasta otrzymuje zapytania od urzędników. Zapytanie te przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, średnio raz na dwie godziny.
Z powodu upgrade'u oprogramowania, serwer musi zostać wyłączony na pewien okres czasu. Jaka może być maksymalna długość tej przerwy, aby prawdopodobieństwo, że w tym czasie przyjdzie jakiekolwiek zapytanie, nie było większe niż 2 % ?

Odpowiedź: $t \approx 145\,\mathrm{s}$

11. Każdy z sześciu użytkowników pewnej małej sieci generuje ruch telekomunikacyjny równy 0.5 Mbit/s – przez 70 % czasu lub 1.3 Mbit/s – przez 30 % czasu. Cały ten ruch jest kierowany na zewnątrz sieci jednym wspólnym łączem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w danym momencie strumień danych transmitowany tym łączem przekroczy 6 Mbit/s ?

Odpowiedź: $P \approx 7.05\%$

12. Każdy z 50-ciu użytkowników sieci LAN generuje ruch telekomunikacyjny dany rozkładem jednostajnym z przedziału <0 Mbit/s, 1 Mbit/s>. Jaka powinna być przepustowość łącza *uplink* w tej sieci, aby prawdopodobieństwo, że łącze to jest całkowicie zajęte było nie większe niż 5 % ?

Odpowiedź: $C_{5\%} = 25 + 1.65 \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} \approx 28.4\,\mathrm{Mbit/s}$

13. Do węzła-mulipleksera w systemie alarmowym podłączonych jest 1000 czujników temperatury. Wszystkie czujniki wykonują odczyty jednocześnie co 5 ms i wysyłają raporty przez multiplekser do centrum kontrolnego. Wielkość raportu jest dana rozkładem wykładniczym o średniej 20 B. Jaka powinna być przepustowość łącza między multiplekserem a centrum kontrolnym przy założeniu, że w 99 przypadkach na 100, do centrum kontrolnego musi dotrzeć komplet raportów ? Multiplekser może zbuforować dowolną ilość danych, ale raporty uznaje się za stracone, gdy ich opóźnienie będzie większe niż 5 ms.

$$C = \frac{20\,\mathrm{kB} + 2.33 \cdot \sqrt{400\,000}\,\mathrm{B}}{5\,\mathrm{ms}} = 4.3\,\mathrm{MB/s}$$

↓

14. Ruch telekomunikacyjny w każdym ze 100 łączy wejściowych do węzła-multipleksera jest dany rozkładem wykładniczym o średniej 100 kB/s. Proszę zaprojektować przepustowość łącza wyjściowego z multipleksera tak, aby multiplekser był w stanie obsłużyć cały przychodzący ruch telekomunikacyjny przynajmniej przez 99 % czasu.

Odpowiedź: C = 12.33 MB/s

15. Ruch telekomunikacyjny w każdym z 25-ciu łączy wejściowych do węzła-multipleksera jest dany rozkładem wykładniczym o średniej równej 1 Mbit/s. Zakładamy, że łącza wejściowe mają wystarczającą przepustowość, aby strumienie danych mogły być bez przeszkód transmitowane przez cały czas. Natomiast łącze wyjściowe z multipleksera, do którego wpływają strumienie danych ze wszystkich łączy wejściowych, posiada przepustowość równą 4.5 MB/s. Przez jaki procent czasu sumaryczny strumień danych będzie zbyt duży, żeby całkowicie zmieścić się w łączu wyjściowym ?

Odpowiedź: Przez 1.39 % czasu.

16*. Pewna zmienna losowa *x* jest dana jako suma dwóch identycznych niezależnych zmiennych losowych x_1 i x_2 o ciągłych rozkładach jednostajnych z przedziału $<0,1>$. Proszę wyprowadzić funkcję gęstości prawdopodobieństwa *p(x)* dla zmiennej losowej *x*.

Rozwiązanie:

$$p(x) = \begin{array}{ll} 0, & \text{dla } x < 0 \\ x, & \text{dla } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 2 - x, & \text{dla } x \in \langle 1, 2\rangle \\ 0, & \text{dla } x > 2. \end{array}$$

17. Do multipleksera podłączonych jest 100 łączy wejściowych i jedno łącze wyjściowe. Ruch telekomunikacyjny w każdym z łączy wejściowych jest dany rozkładem jednostajnym na przedziale <200 kB/s, 600 kB/s$>$. Jaką przepustowość powinno posiadać łącze wyjściowe, aby być w stanie obsłużyć cały ruch wchodzący do multipleksera przynajmniej przez 99.5 % czasu ?

Odpowiedź : C = 42.979 MB/s ≈ 43 MB/s