Ćwiczenia IV i V

We wszystkich poniższych zadaniach należy przyjąć, że zgłoszenia (lub ich odpowiedniki) przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy obsługi podlegają rozkładowi wykładniczemu.
Zadania nr 2 i 3 pochodzą z książki Roberta Coopera: "Introduction to Queueing Theory".

1. Proszę narysować grafy przejść i napisać macierze intensywności dla poniższych systemów kolejkowych :
    a. M/M/1
    b. M/M/3
    c. M/M/N
    d. M/M/∞
    e. M/M/1/N
    f. M/M/3/8
    g. M/M/N/N/N
    h. M/M/1/1/N
    i. M/M/2/5/10

W przypadkach nieskończonej liczby źródeł generujących zgłoszenia (podpunkty a – f), należy przyjąć, że sumaryczna intensywność zgłoszeń jest równa λ. Gdy liczba źródeł generujących zgłoszenia jest skończona (podpunkty g, h, i), każde ze źródeł generuje zgłoszenia o średniej intensywności λ (czyli np. 10 źródeł będzie generować zgłoszenia o sumarycznej intensywności 10λ).
Intensywność obsługi pojedynczego stanowiska obsługi jest równa μ.

2. Do zakładu pucybuta przychodzi średnio 10 klientów w ciągu godziny. Czyszczenie butów trwa średnio 6 minut. W zakładzie są dwa krzesła, ale tylko jeden pucybut. Klienci, którzy widzą, że oba krzesła są zajęte (jeden klient obsługiwany, drugi czeka) – odchodzą. Proszę narysować graf przejść opisujący ten system kolejkowy i obliczyć prawdopodobieństwa wszystkich możliwych stanów. Proszę też znaleźć średnią liczbę klientów obsługiwanych w ciągu godziny. W drugie kolejności, proszę rozwiązać to samo zadanie dla zakładu, w którym pucybut ma pomocnika.

Rozwiązanie: $\Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{1}{3}$
średnia liczba obsługiwanych klientów: **6.67** w ciągu godziny

W drugim przypadku: $\Pi_0 = \Pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \Pi_2 = \frac{1}{5}$
średnia liczba obsługiwanych klientów: **8** w ciągu godziny

↓

3.

a. Rozważmy system kolejkowy z pojedynczym serwerem (stanowiskiem obsługi) i nieskończenie długim buforem (nieograniczoną pojemnością systemu). Załóżmy, że intensywność zgłoszeń zależy od stanu systemu i jest równa $\lambda_j = \frac{\lambda}{j+1}$. Intensywność obsługi jest równa μ.

b. Rozważmy system o nieskończonej liczbie stanowisk obsługi. Całkowita intensywność zgłoszeń jest równa λ, a intensywność obsługi każdego serwera – μ.

c. Do systemu z pojedynczym serwerem i nieskończoną pojemnością przychodzą zgłoszenia z intensywnością λ. Nadchodzące zgłoszenie, gdy widzi, że w systemie jest już n zgłoszeń rezygnuje z prawdopodobieństwem $\frac{n}{n+1}$. Intensywność obsługi jest równa μ.

We wszystkich trzech przypadkach proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że system jest w stanie n i średnią ilość zgłoszeń jednocześnie przebywających w systemie. Dla podpunktu c proszę policzyć również średnie prawdopodobieństwo, że przychodzące zgłoszenie zrezygnuje z wejścia do systemu.

Rozwiązanie: Odpowiedzi dla wszystkich trzech podpunktów są takie same:

$$\Pi_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \cdot e^{\frac{-\lambda}{\mu}}, \quad L = \frac{\lambda}{\mu}$$

Dla podpunktu c, prawdopodobieństwo rezygnacji: $P = 1 - \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \cdot e^{\frac{-\lambda}{\mu}}$

4. Na stacji benzynowej stoją 3 dystrybutory paliwa. Obsługa przy każdym z nich trwa średnio 3 minuty. Na stację przyjeżdża średnio 40 samochodów w ciągu godziny, wszystkie karnie czekają na swoją kolej. Proszę narysować graf przejść opisujący tę sytuację i obliczyć prawdopodobieństwo, że na stacji nie ma żadnego samochodu.

Odpowiedź : $\Pi_0 = \frac{1}{9}$

5. Do centrali telefonicznej w małej firmie przyłączonych jest 20 pracowników. Każdy z nich średnio 2 razy na godzinę próbuje zadzwonić poza firmę, rozmowy trwają średnio 2 minuty. Centrala ma 3 łącza wyjściowe. Proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że w danej chwili dokładnie dwa łącza wyjściowe będą zajęte.

Odpowiedź : $\Pi_2 = \frac{190}{791}$

↓

6. Z pojedynczego serwera – bazy danych korzysta 10 osób. Każda osoba generuje pytanie do serwera, czeka na odpowiedź, następnie odczekuje średnio 10 minut i generuje następne pytanie. Obsługa każdego pytania trwa średnio 15 sekund. Proszę narysować graf przejść i podać zależność na prawdopodobieństwo, że serwer jest wolny.

Odpowiedź :

$$\Pi_0 = \frac{1}{10! \cdot \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{40^n \cdot (10-n)!}}$$

7. Do wyroczni w Delfach tłumnie przybywają ludzie – średnio 3000 osób na dobę – i czekają w wielkim ogonku. Zniecierpliwiona wyrocznia stara się ich szybko załatwić i mieć choć chwilę wolnego. Średnio, z jedną osobą rozmawia 20 sekund. Ile czasu wolnego pozostaje jej średnio w ciągu każdej godziny ? Jak długi przeciętnie jest ogonek ?

Odpowiedzi : Czas wolny wyroczni – 1100 sekund w ciągu godziny

Ogonek – średnio $2\frac{3}{11}$ osoby

8. W systemie operacyjnym uruchomiono właśnie proces wyszukiwania wirusów. Proces ten średnio co 30 sekund (czas dany rozkładem wykładniczym) znajduje plik, który potencjalnie może być zarażony. Natychmiast po znalezieniu każdego takiego pliku uruchamiany jest dodatkowy pod-proces, który sprawdza ów plik i usuwa ewentualnego wirusa – trwa to statystycznie 3 minuty (czas dany rozkładem wykładniczym). Proszę podać prawdopodobieństwo, że w danej chwili działa *n* pod-procesów sprawdzających zainfekowane pliki.

Odpowiedź : $\Pi_n = \frac{6^n}{n!} \cdot e^{-6}$

9. Na tydzień przed urodzinami króla Francji, pan de Treville postanowił sprawdzić formę podległych mu muszkieterów i przy okazji dać im małą lekcję fechtunku. Atos, Portos, Aramis i d'Artagnan zostali poproszeni o stawienie się na placu treningowym i przeprowadzenie krótkiej walki sparingowej z każdym muszkieterem. Muszkieterowie zaczęli schodzić się z samego rana, średnio 90 na godzinę, w razie potrzeby ustawiając się w kolejce. Czterech fechmistrzów pracowało w pocie czoła, dając lekcje szermierki trwające średnio 2 minuty. Proszę podać prawdopodobieństwa wszystkich stanów tego systemu. Jaka jest średnia liczba muszkieterów ćwiczących jednocześnie ?

Odpowiedzi : $\Pi_0 = \frac{2}{53}$, $\Pi_1 = \frac{6}{53}$, $\Pi_2 = \frac{9}{53}$, dla n>2 : $\Pi_n = \frac{9}{53} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$

Średnia liczba ćwiczących muszkieterów jest równa 3 (lub 6 – przy uwzględnieniu fechmistrzów).

↓

10. Siedmiu krasnoludków zadręcza królewnę Śnieżkę prośbami o opowiadanie bajek. Co gorsza, każdy krasnal lubi inne bajki i propozycje innych karzełków zupełnie go nie interesują. Królewna jest cierpliwa, wszystkie prośby zapamiętuje i realizuje po kolei. Niecierpliwe krasnale Śnieżka ucisza groźnym i tajemniczo brzmiącym okrzykiem „FIFO!". Z konieczności, przy tak dużej liczbie chętnych, bajki są krótkie – trwają średnio 4 minuty. Każdy karzełek średnio co godzinę żąda nowej opowieści, chyba, że akurat słucha swojej bajki lub jego propozycja czeka w kolejce.
Proszę narysować graf przejść opisujący ciężki żywot królewny oraz obliczyć prawdopodobieństwo, że Śnieżka ma chwilę wolną na malowanie paznokci. Proszę też policzyć ile bajek królewna opowiada średnio w ciągu godziny.

Rozwiązanie : $\Pi_0 = \dfrac{1}{7!\cdot\sum\limits_{n=0}^{7}\dfrac{(1/15)^n}{(7-n)!}}$

Średnia liczba bajek na godzinę : $\mu\cdot(1-\Pi_0) = 15\cdot\left(1-\dfrac{1}{7!\cdot\sum\limits_{n=0}^{7}\dfrac{(1/15)^n}{(7-n)!}}\right)$

11. Polska, lata 70-te – PRL w pełnej krasie. W sklepie na Krakowskim Przedmieściu tylko ocet i zapałki. Dwie naburmuszone sprzedawczynie nie śpieszą się z obsługą klientów – każda z nich załatwia pojedynczego klienta średnio w 3 minuty. Na szczęście, nie ma też wielu chętnych na zakupy, przeciętnie 30 osób na godzinę. W razie potrzeby, klienci cierpliwie czekają na swoją kolej. Proszę narysować graf przejść i macierz intensywności opisujące ten system i podać zależność na prawdopodobieństwo, że system jest w stanie *n*.

Rozwiązanie :

$\Pi_0 = \dfrac{1}{7}$, dla n > 0 : $\Pi_n = \dfrac{2}{7}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

12. Rzeką Jenisej na Syberii spływają wielkie bale drewna – średnio 240 w ciągu doby. Trzy łodzie z ekipami z pobliskiego tartaku pracują bez przerwy, łapiąc owe bale i odholowywując je do brzegu. Holowanie pojedynczej kłody zajmuje średnio 12 minut. Proszę narysować graf przejść opisujący ten system i obliczyć prawdopodobieństwa wszystkich jego stanów. Proszę też policzyć średnią liczbę ekip holujących kłody.

Rozwiązanie : $\Pi_0 = \dfrac{3}{19}$, $\Pi_1 = \dfrac{6}{19}$, $\Pi_2 = \dfrac{6}{19}$, $\Pi_3 = \dfrac{4}{19}$

Średnia liczba ekip holujących kłody : $L = 1\dfrac{11}{19}$

↓

13. Proszę rozważyć system kolejkowy, który nie ma bufora, ale posiada nieskończenie wiele stanowisk obsługi – każde z nich obsługuje zgłoszenia średnio przez 30 sekund. Zgłoszenia przychodzą do systemu ze średnią intensywnością 4/minutę. Proszę narysować macierz intensywności opisującą ten system i policzyć prawdopodobieństwa wszystkich jego stanów. Proszę też podać średnią liczbę zgłoszeń znajdujących się w systemie.

Odpowiedzi: $\Pi_n = \frac{2^n}{n!} \cdot e^{-2}$, N = 2.

14. Serwer – baza danych posiada 3 stanowiska obsługi (na każdym z nich zgłoszenie przetwarzane jest przeciętnie przez 5 minut) i bufor zdolny pomieścić jeszcze 3 zgłoszenia. Użytkowników serwera jest tylko czterech – każdy z nich wysyła swoje zgłoszenie, a po otrzymaniu odpowiedzi czeka średnio 10 minut i dopiero wtedy wysyła kolejne zgłoszenie. Proszę narysować macierz prawdopodobieństw i obliczyć prawdopodobieństwa wszystkich stanów systemu. Proszę też policzyć, jak często (średnio) obsłużone zgłoszenia opuszczają system?

Odpowiedzi: $\Pi_0 = \frac{12}{61}$, $\Pi_1 = \frac{24}{61}$, $\Pi_2 = \frac{18}{61}$, $\Pi_3 = \frac{6}{61}$, $\Pi_4 = \frac{1}{61}$

Obsłużone zgłoszenia opuszczają system ze średnią częstotliwością $\frac{972}{61}$ na godzinę.

Uwaga : zadanie z sezonu 2007. Wciąż jeszcze aktualne...

15. Mamy EURO 2012! W Polsce obłęd: każdy już teraz chce kupić bilet. Polski Związek Piłki Nożnej stanął na wysokości zadania – na Stadionie Dziesięciolecia otwarto trzy punkty sprzedaży biletów. Kibice doceniają zaangażowanie władz polskiej piłki, tłumnie schodzą się na Stadion i ustawiają w jednej wielkiej kolejce. Zakładając, że obsługa jednego kibica przy okienku trwa średnio 20 sekund, a chętnych przybywa średnio ośmiu na minutę, proszę narysować graf stanów opisujących ten system i policzyć prawdopodobieństwo, że w danej chwili *n* punktów sprzedaży jest wolnych, oczekując na kibiców. Proszę również policzyć średni odstęp czasu jaki mija między dwoma kibicami wychodzącymi ze Stadionu z kupionymi biletami.

Odpowiedzi:

Prawdopodobieństwo *n* punktów wolnych: $P_3 = \frac{3}{107}$, $P_2 = \frac{8}{107}$, $P_1 = \frac{32}{321}$, $P_0 = \frac{256}{321}$.

Średni odstęp czasu między dwoma wychodzącymi kibicami: 7.5 sekundy.